

## Тренировочный тур Олимпиады «Математические технологии 2024»

### 1. Задача на английском языке

There are 2 blue socks, 4 white socks, 6 black socks, and 8 red socks in sock drawer. What is the least number of socks that you have to pull out to make sure that you will have a matching pair? (Assume that all the socks are identical except for the color).

Ответ можно записать на любом языке.

### 2. Замечательные пределы

Справочный материал: таблица Замечательных эквивалентностей функций при  $x \rightarrow 0$

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\sin x \sim x$                 | 6) $\ln(1+x) \sim x$               |
| 2) $\arcsin x \sim x$              | 7) $\log_a x \sim \frac{x}{\ln a}$ |
| 3) $\operatorname{tg} x \sim x$    | 8) $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$    |
| 4) $\operatorname{arctg} x \sim x$ | 9) $e^x - 1 \sim x$                |
| 5) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ | 10) $(1+x)^m - 1 \sim m \cdot x$   |

Задача:

Пользуясь этой таблицей, найдите предел функции  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg}^2 3x}{\sin 4x \cdot (1 - \cos x)}$

### 3. Производная функции

Справочный материал: таблица производных

Задача:

Найти производную показательно-степенной функции  $y = x^{2x^2}$

### 4. Первообразная функции

Справочный материал:

- Таблица интегралов
- Уравнение прямой, проходящей через точки  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Задача:

Прямая  $y = kx + b$ , проходящая через точки  $(1; -4)$  и  $(2; 0)$  является производной функции  $f(x)$ . Найдите функцию  $f(x)$  и постройте её график, если известно, что она проходит через точку  $(0; 5)$ .

### 5. Функция

Найдите все прямолинейные асимптоты функции  $y = \frac{2x^2 - 1}{x^3 + 8}$ . Запишите уравнения прямых и найдите все точки пересечения данных асимптот.

### 6. Неопределённый интеграл

Справочный материал: таблица интегралов

Задача:

Проинтегрируйте рациональную дробь  $\int \frac{x^4 + 1}{x^2 + x - 2} dx$

## 7. Теория вероятностей

### Справочный материал:

$n$  – число независимых испытаний

$p$  – вероятность успеха события в каждом испытании

$q$  = вероятность неуспеха события в каждом испытании ( $p+q=1$ )

$k$  — сколько раз событие может произойти в  $n$  независимых испытаний

$k_0$  - наивероятнейшее число наступления события

$np-q \leq k_0 < np+p$

### Задача:

Отдел технического контроля проверяет партию из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартная 0,75. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

## 8. Графы

## 9. Шифрование

### Справочный материал:

Шифр Вернама (XOR-шифр)

Простейший шифр на основе бинарной логики, который обладает **абсолютной** криптографической стойкостью. Без знания ключа, расшифровать его невозможно (доказано Клодом Шенноном).

Исходный алфавит — латиница.

Сообщение разбиваем на отдельные символы и каждый символ представляем в бинарном виде. Каждую букву представим в виде бинарного кода.

Символ	Двоичный код	Десятичный код	Символ	Двоичный код	Десятичный код
A	01000001	65	N	01001110	78
B	01000010	66	O	01001111	79
C	01000011	67	P	01010000	80
D	01000100	68	Q	01010001	81
E	01000101	69	R	01010010	82
F	01000110	70	S	01010011	83
G	01000111	71	T	01010100	84
H	01001000	72	U	01010101	85
I	01001001	73	V	01010110	86
J	01001010	74	W	01010111	87
K	01001011	75	X	01011000	88
L	01001100	76	Y	01011001	89
M	01001101	77	Z	01011010	90

Элемент XOR принимает сигналы (0 или 1 каждый), проводит над ними логическую операцию и выдает один сигнал, исходя из входных значений.

Если все сигналы равны между собой (0-0 или 1-1 или 0-0-0 и т.д.), то на выходе получаем 0. Если сигналы не равны (0-1 или 1-0 или 1-0-0 и т.д.), то на выходе получаем 1.

Для шифровки сообщения, введем сам текст для шифровки и ключ такой же длины. Переведем каждую букву в ее бинарный код и выполним формулу *сообщение XOR ключ*

Например:  
сообщение: LONDON  
ключ: SYSTEM

Переведем их в бинарный код и выполним XOR:

01001100 01001111 01001110 01000100 01001111 01001110  
01010011 01011001 01010011 01010100 01000101 01001101

---

00011111 00010110 00011101 00010000 00001010 00000011

Переведём числа из двоичной системы в десятичную.

Получим ответ : 31 22 29 16 10 3.

Задача:  
Зашифруйте сообщение: TABLE  
ключ: CLOCK

Запишите ответ в виде последовательности чисел в десятичной записи.

## 10) Линейная алгебра

Решить систему линейных уравнений в матричной форме

$$5x+y = 3$$

$$3x-5y = 41$$